PART3 特殊な形の置換積分法

要点整理と公式

要点① $x=a\sin\theta$ とおく置換積分法

定積分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求める。

$x=$　　　とおくと　$dx=\cos\theta d\theta$

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$\to$

区間 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において $\cos\theta\geqq0$ であるから $\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

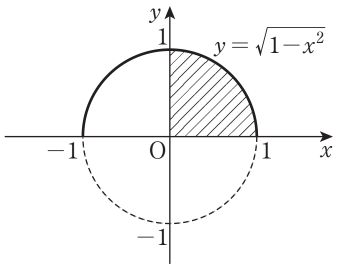
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$y=\sqrt{1-x^2}\iff x^2+y^2=1$，$y\geqq0$ であるから

$y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 1 の円の

上半分となる。$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，右図の斜線部分

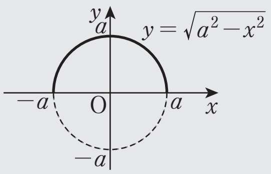
の面積に等しい。



$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分

$\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ の定積分は

$x=a\sin\theta$ とおき，$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。



要点 ② $x = a\tan\theta$ とおく置換積分法

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求める。

$x=$　　　　とおくと　$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \to 1$
θ	$\to$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

x^2+a^2 の定積分

x^2+a^2 の定積分は

$x = a\tan\theta$ とおき，$\tan^2\theta+1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

Point Pickup

特殊な形の置換積分法

$\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ の定積分

→ $x=a\sin\theta$ とおき，$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する

x^2+a^2 の定積分

→ $x=a\tan\theta$ とおき，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

第17講 PART3 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

1 $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$x=2\sin\theta$ とおいて，θ の定積分で表して求める。

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{イ}$$

$$= \boxed{ウ}$$

x	0	→	2
θ	0	→	ア

[ア の選択肢]

① 1　② π　③ $\dfrac{\pi}{2}$

[イ の選択肢]

① $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\theta d\theta$　② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta$

③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta$　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta d\theta$

[ウ の選択肢]

① 1　② π　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ 2π

2 $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

$x=$ エ $\sin\theta$ とおいて，θ の定積分で表して求める。

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=\boxed{\text{オ}}$$

$$=\frac{\pi}{\boxed{\text{カキ}}}$$

[エ の選択肢]

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ 4

[オ の選択肢]

① $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}d\theta$　　② $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

③ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$　　④ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta$

3 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

$x=$ [ク] とおいて，θ の定積分で表して求める。

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \boxed{ケ}$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{コ}}$$

[[ク] の選択肢]

① $\sin\theta$　　② $\cos\theta$　　③ $\tan\theta$

[[ケ] の選択肢]

① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$　　② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta d\theta$

③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$　　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta d\theta$

PART3 特殊な形の置換積分法

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

[解答]

(1) $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$

x	$1\to\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos\theta\cdot2\cos\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta$

$$=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$

x	$-\sqrt{2}\to1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ において，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi$

(3) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

第17講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：④，ウ：②

[解説]

$x=2\sin\theta$ とおくと，[A]

$dx=2\cos\theta d\theta$

x	0	$\to$	2
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

[A]　$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分では，
$x=a\sin\theta$ とおき，
$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，

$\cos\theta\geqq 0$ であるから，

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\theta}$$
$$=2\cos\theta$$

よって，

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{4\cos^2\theta d\theta}$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \quad \text{[B]}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$$

[B]　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
$\Longleftrightarrow\quad \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

2 **[正解]** エ：②，オ：②，カキ：12

[解説]

$x=\mathbf{2\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと，

$dx=2\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ [C]

x	$\sqrt{2}$	$\to$	2
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

[C]　$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分では，
$x=a\sin\theta$ とおき，
$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，

$\cos\theta>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{8-x^2}&=\sqrt{8-(2\sqrt{2}\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{8(1-\sin^2\theta)}\\&=\sqrt{8\cos^2\theta}\\&=2\sqrt{2}\cos\theta\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{2\sqrt{2}\cos\theta}d\theta\\&=\boldsymbol{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta}\\&=[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

3　[正解] ク：③，ケ：①，コ：3

[解説]

$\boldsymbol{x = \tan\theta}$ とおくと，

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \quad \text{[D]}$$

x	0	$\to$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

[D]　$\frac{1}{x^2+a^2}$ の定積分では，
$x = a\tan\theta$ とおき，
$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。